INFORMATIK

FORSCHUNGSGRUPPE SCHALTWERKSENTWURF
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

29. 8. 1973

Studienarbeit für Herrn Dieter M e t z d o r f Matr.-Nr. 28 663

Kennwort: Digitaler Integrierer

Vektorgeneratoren mit konstanter Schreibgeschwindigkeit lassen sich einfach mit digitalen Integrierern realisieren. Für den 2-dimensionalen Fall soll untersucht werden, welches DDA-Prinzip

a) symmetrisch,
b) unsymmetrisch

auf dem Display die besseren Vektoren generiert. Der Aufwand beider Verfahren ist einzugeben und zu vergleichen.

Literatur: Newman/Sproull:
Principles of Interactive
Computer Graphics

Liebig

(Prof. Dr. H. Liebig)

Betreuer: Dipl.-Ing. W. Straßer

1 Berlin 10, Einsteinufer 35 - 37 · Tel.: (0311) 314 - 38 69; Behördennetz: 991 38 69

STUDIENARBEIT

VON

DIETER METZDORF

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Einleitung

In digitaler Technik ist es nicht möglich, eine kontinuierliche Linie auf einem Display zu zeichnen. Die Digitalisierung läßt nur die Bildung von einzelnen Punkten zu, die jeweils auf den Schnittpunkten des Koordinatenrasters liegen. Eine Linie läßt sich folglich nur durch Aneinanderfügen von einzelnen Punkten annähern.
Eine gute Approximierung ist dann gegeben, wenn die Punkte

a) unabhängig von der Steigung der Linie, d.h. des Vektors, in gleichem Abstand voneinander generiert werden

und b) gleichmäßig ausgewählt werden, d.h. eine Bevorzugung bestimmter Stellen findet nicht statt.

Die Einhaltung der ersten Forderung bewirkt, daß alle Vektoren unabhängig von ihrer Steigung gleich hell gezeichnet werden, die zweite Eigenschaft verhindert das Auftreten von Vektoren, die auf irgendeine Weise nicht gerade erscheinen.
Die verschiedenen digitalen Techniken der Punktegenerierung unterscheiden sich in der Punktdichte sowie in der Genauigkeit der Annäherung an den idealen Vektor.
Die Algorithmen digitaler Vektorgeneratoren sind inkremental: die Berechnung der Koordinaten eines neuen Punktes hängt ab von den Koordinaten des vorigen. Diese inkrementale Annäherung an den idealen Vektor erspart komplexe Rechenwerke; an die Stelle zeitraubender Multiplikation kann die schnellere und billigere Addition treten.

Vektor und Vektorlänge

Ein Vektor werde dargestellt durch
seinen Anfangspunkt (X_a, Y_a),
seinen Endpunkt (X_b, Y_b) und
die folgendermaßen definierten Inkremente:

$$\Delta X := X_b - X_a$$
$$\Delta Y := Y_b - Y_a \quad .$$

Ein solcher Vektor soll zusammengesetzt werden aus Punkten einer definierten Anzahl N. Bestimmend für die Anzahl N der Punkte eines Vektors ist seine Länge.

Bei der Berechnung von N muß man jedoch nicht die Form

$$\sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2}$$

zugrunde legen; die Auswertung dieser Formel wäre viel zu aufwendig. Statt dessen wird auch die Länge nur approximiert.

Verschiedene Annäherungen sind möglich:

$$\mathrm{Max}\,(|\Delta X|, |\Delta Y|),$$

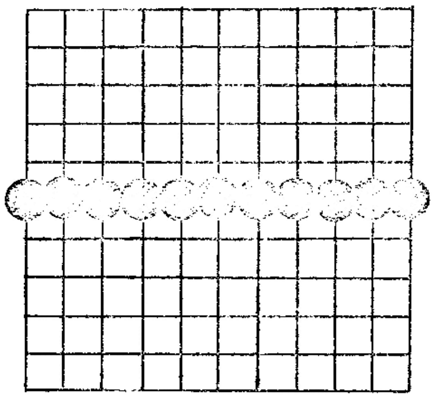
$$\mathrm{Max}\,(|\Delta X|, |\Delta Y|) + \frac{\mathrm{Min}\,(|\Delta X|, |\Delta Y|)}{2},$$

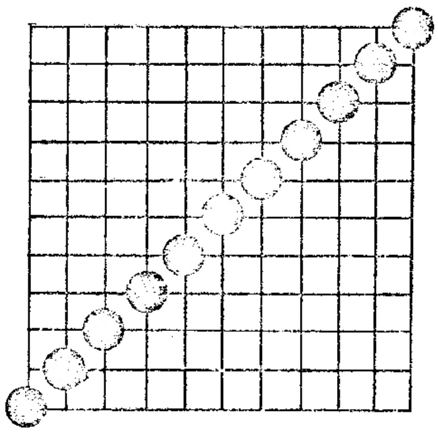
$$|\Delta X| + |\Delta Y|$$

oder auch als 2^i in der Form

$$2^{i-1} \leq \mathrm{Max}\,(|\Delta X|, |\Delta Y|) < 2^i \quad .$$

Die Helligkeitsunterschiede bei der digitalen Generierung von Vektoren sind nicht abhängig von der Anzahl der Punkte, sondern von der Lage der Punkte!
Bei gleichem N ist die Helligkeit eine Funktion der Steigung des Vektors:
Ein Vektor unter 45° erscheint nur noch mit 70 % der Helligkeit der horizontalen Lage - gleiche Punkthelligkeit vorausgesetzt.





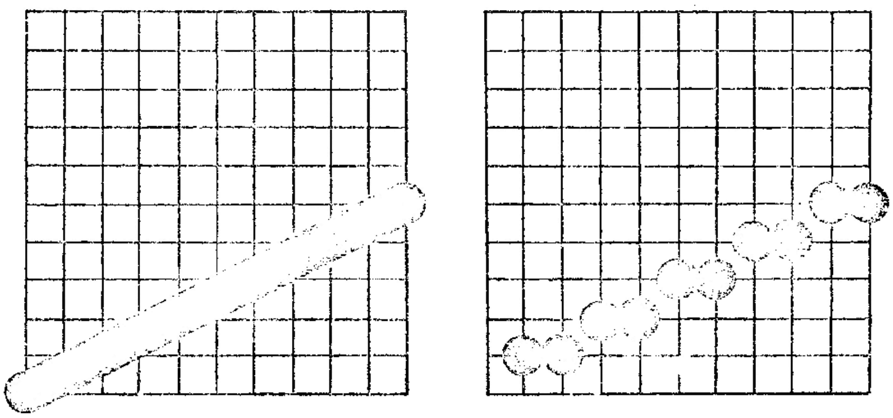
Der Digitale Differential-Analysator (DDA)

Der DDA-Algorithmus beruht auf der Darstellung des Vektors als gerade Linie durch

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Der DDA liefert eine Näherung dieser Differentialgleichung.

a) Der unsymmetrische DDA



idealer realer

Vektor

Der unsymmetrische DDA erzeugt Punkte, die in der Richtung des größeren Inkrements jeweils genau 1 Rastereinheit voneinander entfernt sind, die Näherung N ist also gegeben durch

$$N = \mathrm{Max}\ (|\Delta X|, |\Delta Y|)\ .$$

Im gezeigten Beispiel gilt $N = \Delta X$.
Die y-Zwischenräume sind die beste Näherung für $\Delta Y/\Delta X$. Der absolute Wert $|\Delta Y/\Delta X|$ ist hier immer nicht größer als 1, da der Vektor in x eine größere Komponente als in y hat.
Die iterative Berechnung der Abszisse ist simpel:

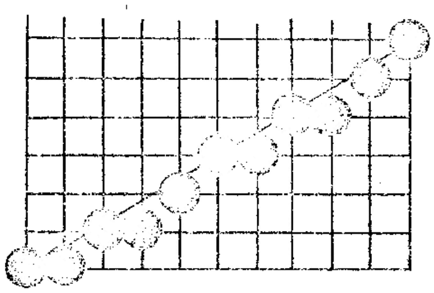
$$X_o = X_a$$
$$X_n = X_{n-1} + 1 \qquad \text{für } n = 1,\ldots,N \quad .$$

Bei näherer Betrachtung der angenommenen Berechnung der Ordinate

$$Y_o = Y_a$$
$$Y_n = Y_{n-1} + (\Delta Y/\Delta X) \quad \text{für } n = 1,\ldots,N$$

fällt jedoch auf, daß Y_n als nicht ganze Zahl nicht verarbeitet werden kann, die darstellbaren Punkte liegen ja nur auf den Rasterschnittpunkten. Nimmt man nur den ganzzahligen Anteil von Y_n zum Ablenken des Elektronenstrahls als weiterzugebendes Y, liegen plötzlich alle generierten Punkte auf einer Seite des idealen Vektors:

$$Y_o = Y_a$$
$$Y_n = Y_{n-1} + (\Delta Y/\Delta X) \quad \text{für } n = 1,\ldots,N$$
$$Y_{Display} = \text{entier}(Y_n)$$



Es darf also nicht abgeschnitten werden, folglich wird gerundet. Runden heißt: 0,5 addieren und dann abschneiden:

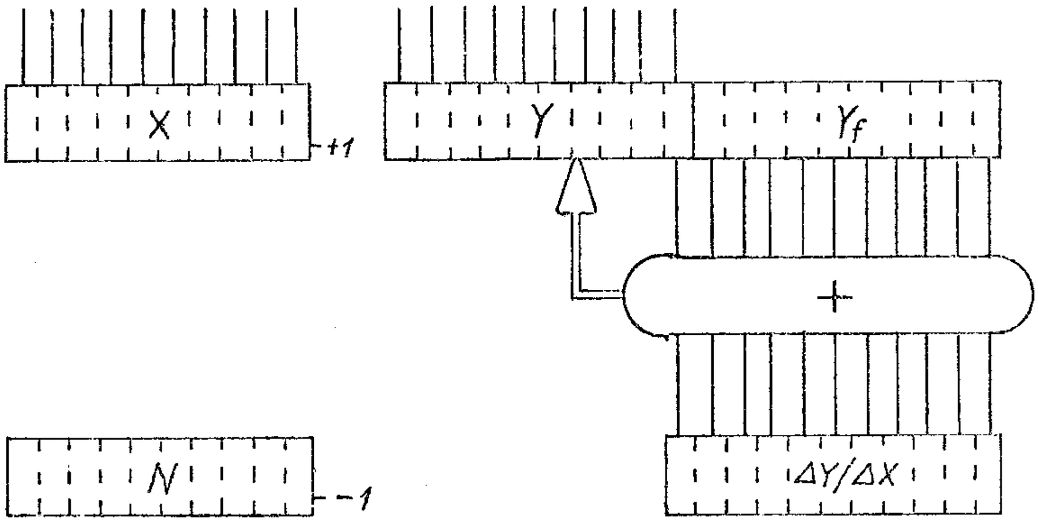
$$Y_{Display} = \text{entier}(\ Y_n + 0{,}5\ )$$

Effektiver ist es, diese zusätzliche Addition außerhalb des eigentlichen Additionszyklus durchzuführen:

$$\begin{aligned} Y_o &= Y_a + 0{,}5 \\ Y_n &= Y_{n-1} + (\Delta Y/\Delta X) \quad \text{für } n = 1,\ldots,N \\ Y_{Display} &= \text{entier}(\ Y_n) \end{aligned}$$

Mit dieser Methode sind die Punkte im Bild berechnet worden.

Die hardwaremäßige Realisation hat folgendes Aussehen:



Die Register X und Y führen direkt zu den DAU's des Displays. Sie werden zu Anfang mit X_a und Y_a

geladen; der Rückwärtszähler N wird auf $\mathrm{Max}(|\Delta X|, |\Delta Y|)$ gesetzt - hier also ΔX. Der nicht ganzzahlige Y-Teil Y_f wird auf 0,5 vorgesetzt. Solange in N keine Null steht, wird ein neuer Punkt dieses Vektors generiert. Die maximale Vektorlänge ist gegeben durch die Wortlänge der Register; zu beachten ist, daß $|\Delta Y/\Delta X| \leq 1$, die Wortlänge des entsprechenden Speicherregisters muß also um 1 größer sein als beim Y_f-Register.

Die Wortlänge p der im allgemeinen Falle vorhandenen Register X_f und Y_f muß so gewählt werden, daß als realer Endpunkt auch wirklich der beabsichtigte Vektorendpunkt erscheint.

Dazu folgende Betrachtung - es genügt die Einschränkung auf die Koordinate X, den Fall $\Delta X \geq 0$ und $N > \Delta X$.

Der mathematische Quotient $\Delta X/N$ hat unendlich viele Stellen hinter dem Komma:

$$\frac{\Delta X}{N} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i} ,$$

wobei jedes x_i eine Binärziffer ist.

Technisch gesehen wird nach p Stellen abgeschnitten:

$$\left(\frac{\Delta X}{N}\right)_p = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot 2^{-i} .$$

Der verbleibende Rest genügt der Ungleichung

$$0 \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i} < 2^{-p} .$$

Daraus folgt

$$\frac{\Delta X}{N} \geq \left(\frac{\Delta X}{N}\right)_p > \frac{\Delta X}{N} - 2^{-p} .$$

Insgesamt wurde $N \cdot \left(\frac{\Delta X}{N}\right)_p$ addiert, damit soll der Endpunkt erreicht sein:

$$\Delta X \geq N \cdot \left(\frac{X}{N}\right)_p > \Delta X - N \cdot 2^{-p} \quad ,$$

$$X_a + 0{,}5 + \Delta X \geq X_{N_{(p)}} > X_a + 0{,}5 + \Delta X - N \cdot 2^{-p}$$

mit $X_{N_{(p)}}$ als technischer Endsumme.

Der Endpunkt ist dann wirklich erreicht worden, wenn der Fehler nicht zu groß war; so muß gelten:

$$\text{entier}(X_a + 0{,}5 + \Delta X - N \cdot 2^{-p}) = X_a + \Delta X$$

oder $\quad N \leqslant 2^{p-1} \quad .$

Es sei m die Wortlänge der Inkremente ΔX und ΔY. Liegen die Inkremente in Einerkomplementdarstellung oder als vorzeichenbehaftete Betragszahlen vor, gilt

$$N_{max} = 2^{m-1} - 1 \quad ;$$

sind die Zahlen im Zweierkomplement gegeben:

$$N_{max} = 2^{m-1} \quad .$$

Allgemein gilt die Forderung

$$p \overset{!}{=} m \quad .$$

Unabhängig von der Zahlendarstellung müssen also vor und hinter dem Komma gleich viele Stellen vorhanden sein und verarbeitet werden, damit der Fehler, der beim Dividieren durch das Abschneiden nach der p-ten Stelle gemacht wurde, nicht das Ergebnis verfälscht.

b) Der symmetrische DDA

Wieder wird von

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

ausgegangen, jetzt aber in der Form

$$\frac{dX}{dn} = \frac{\Delta X}{N}$$

und

$$\frac{dY}{dn} = \frac{\Delta Y}{N} \quad .$$

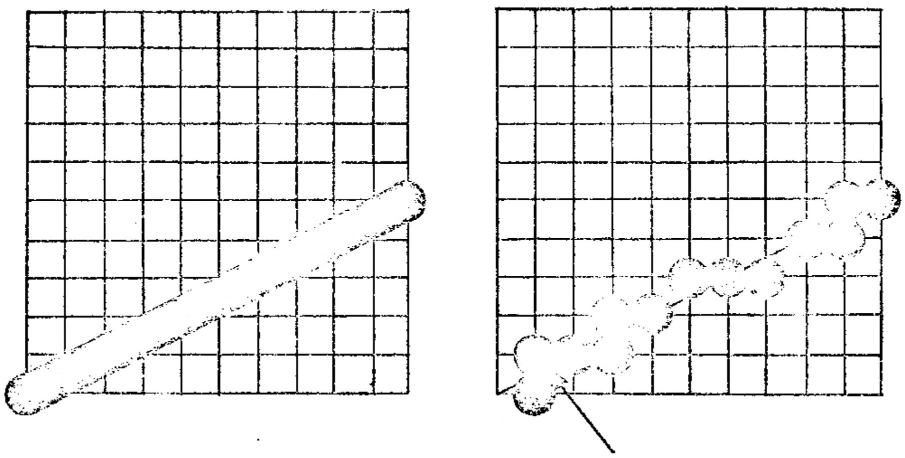
Wird N zu Max($|\Delta X|$, $|\Delta Y|$) gewählt, erhält man wieder obigen Einheits-Inkrement-DDA. Dann müßte aber auch wieder dividiert werden. Das soll jedoch nun vermieden werden.

So ergeben sich die Differenzengleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_o &= X_a + 0{,}5 \\ X_n &= X_{n-1} + (\Delta X/N) \\ Y_o &= Y_a + 0{,}5 \\ Y_n &= Y_{n-1} + (\Delta Y/N) \\ X_{Display} &= \text{entier}(X_n) \\ Y_{Display} &= \text{entier}(Y_n) \end{aligned}\right\} \text{für } n = 1,\ldots,N$$

Wird als N eine Zweierpotenz genommen, können die Quotienten $\Delta X/N$ und $\Delta Y/N$ einfach durch Shiften der Binärzahlen ΔX und ΔY berechnet werden.

Damit werden im allgemeinen Falle weder $\Delta X/N$ noch $\Delta Y/N$ ein Einheitsinkrement. Daher werden einige Stellen überbetont, auch werden unwesentliche Punkte erzeugt. Das sei an einem Bilde demonstriert:



idealer Vektor   unnötig betont

Diese unerwünschten Effekte können klein gehalten werden durch eine entsprechende Wahl der Anzahl N der Vektorpunkte:

N wird so gewählt, daß entweder

$$1/2 \leq |\Delta X/N| < 1$$

und

$$|\Delta Y/N| < 1$$

oder

$$1/2 \leq |\Delta Y/N| < 1$$

und

$$|\Delta X/N| < 1 \quad .$$

Damit beträgt der Punktabstand in einer Koordinatenrichtung fast eine Einheit.

Um dieses Ergebnis zu erreichen, wird die Vektorlänge nach

$$2^{i-1} \leq \mathrm{Max}(|\Delta X|, |\Delta Y|) < 2^{i}$$

als 2^i geschätzt; es werden 2^i Punkte generiert. An die Stelle der unerwünschten Division ist nun ein i-faches Shiften der beiden Binärzahlen ΔX und ΔY getreten.

Die Wortlänge der Register $\Delta X/N$, X_f, $\Delta Y/N$ und Y_f wird bestimmt durch die Wahl von N sowie die Art der Zahlendarstellung der Inkremente:

Sei m die Wortlänge der Zahlen ΔX und ΔY, die

a) in Einerkomplementdarstellung,
b) als vorzeichenbehaftete Betragszahl oder
c) in Zweierkomplementdarstellung

vorliegen.
Dann gilt in den Fällen a) und b)

$$N_{max} = 2^{m-1} \quad ,$$

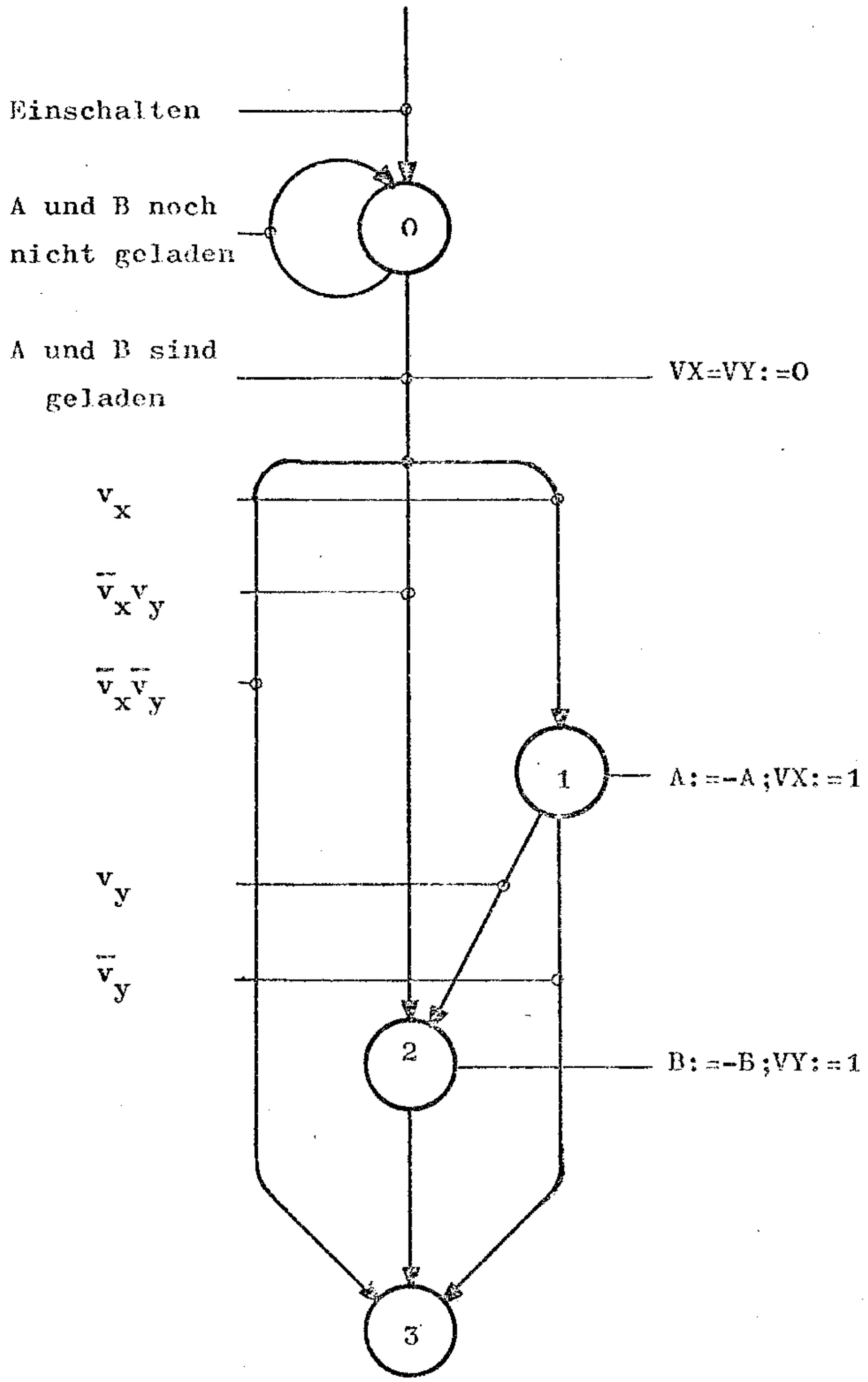
im Falle c) dagegen wegen des vergrößerten Zahlenbereiches

$$N_{max} = 2^{m} \quad ;$$

die Register müssen also m-1 bzw. m Stellen haben.

Vergleich der beiden DDA-Arten

Im folgenden werde die Zweierkomplementdarstellung der 11 bit langen Inkremente vorausgesetzt.
Die beiden DDA-Arten unterscheiden sich hardwaremäßig nur in der Generierung des Punktabstandes; gemeinsam ist die Bildung der Absolutwerte $|\Delta X|$ und $|\Delta Y|$:
Die Register A und B - jeweils 11 bit lang - nehmen $|\Delta X|$ und $|\Delta Y|$ auf; die Originalvorzeichen v_x und v_y werden als VX und VY weggespeichert, um eventuell die Ergebnisse $\Delta X/N$ und $\Delta Y/N$ vorzeichenmäßig zu korrigieren.
Dividiert werden können nur nicht negative Zahlen, auch darf der Divisor nicht negativ sein. Der Fall $\Delta X = \Delta Y = 0$ ist beim unsymmetrischen DDA aus der Division herauszuhalten, beim symmetrischen DDA ergeben sich dagegen automatisch $i = 0$ und $N = 1$.
Für diesen gemeinsamen Verarbeitungsteil soll ein Diagramm den Ablauf verdeutlichen:



Danach muß unterschieden werden.

a) Beim unsymmetrischen DDA soll in A der Dividend stehen, also wird

Max(A , B) nach B und

Min(A , B) nach A

gebracht. Das dabei eventuell notwendige Vertauschen der Registerinhalte geschieht durch dreimalige Bildung des EXCLUSIV-ODERs:

1) $A := A \oplus B$

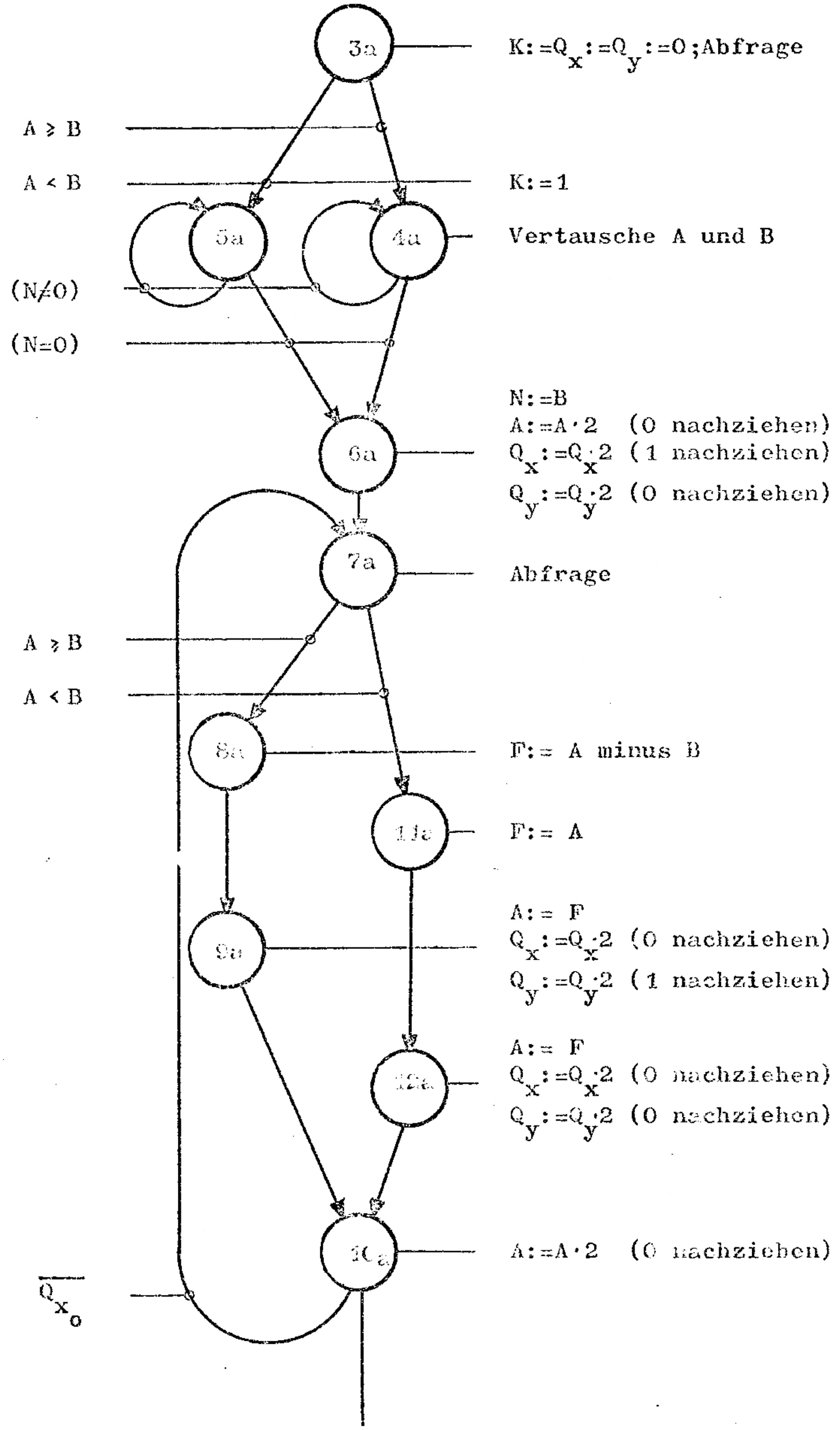
2) $B := A \oplus B$

3) $A := A \oplus B$ (jeweils bitweise)

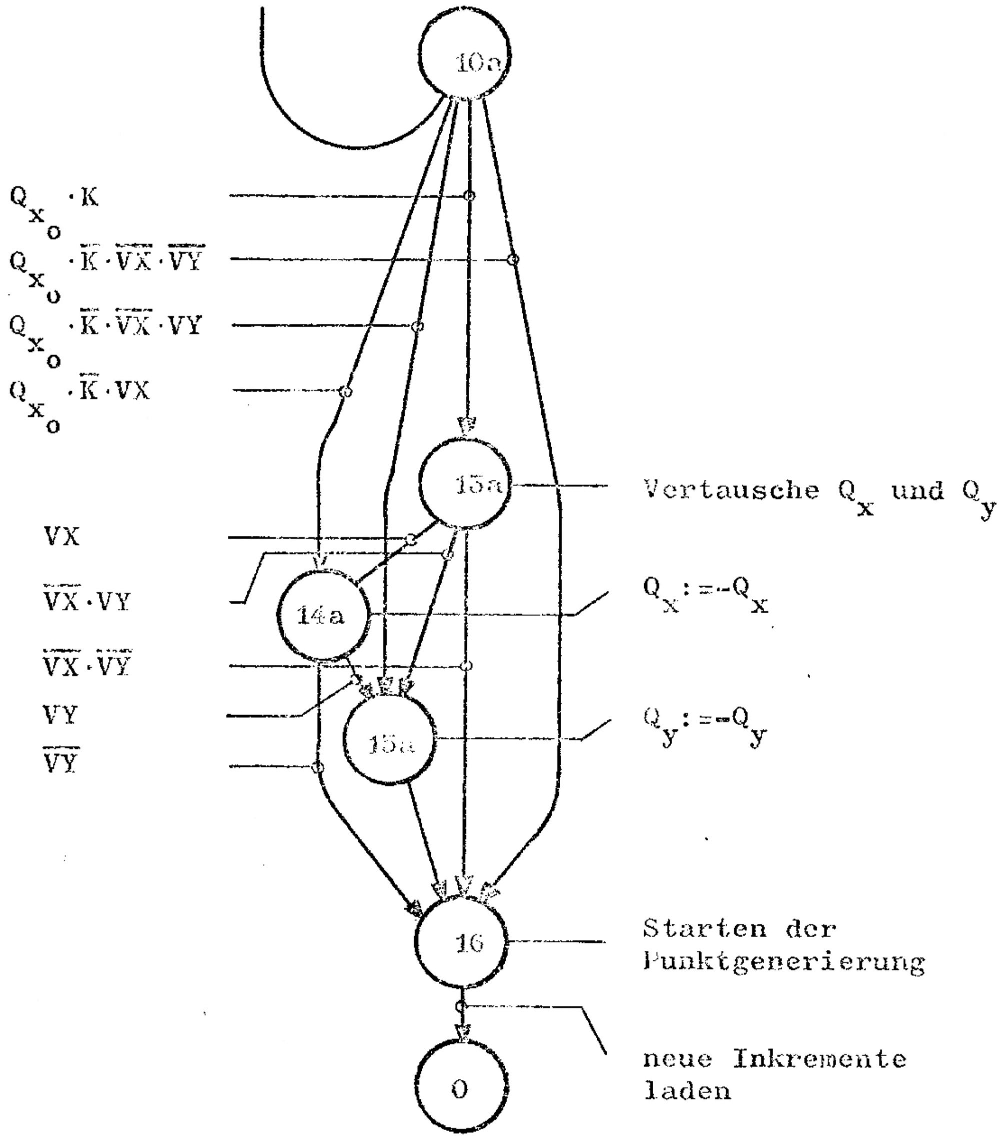
und wird in K als K = 0 vermerkt.
Ist nun in N eine Null, kann N mit dem Registerinhalt von B geladen werden - eine Einsparung des Registers B ist durch Benutzen des Zählers N als Register B möglich, jedoch mit einer größeren Pause zwischen zwei Vektoren verbunden.
Q_x und Q_y sind die jeweiligen, 12 bit langen Quotientenregister. Q_x ist dabei als

$$Q_{x_o} \; Q_{x_{-1}} \; Q_{x_{-2}} \; \ldots \; Q_{x_{-11}}$$

zu verstehen, der Index ist gleich dem Exponenten der zugehörigen Zweierpotenz.
Q_y ist entsprechend aufgebaut.
Die Funktionsweise der Division wird vorausgesetzt.


3a
K:=Q$_x$:=Q$_y$:=0;Abfrage
A ≥ B
A < B
K:=1
5a
4a
Vertausche A und B
(N≠0)
(N=0)
N:=B
A:=A·2 (0 nachziehen)
Q$_x$:=Q$_x$·2 (1 nachziehen)
Q$_y$:=Q$_y$·2 (0 nachziehen)
6a
7a
Abfrage
A ≥ B
A < B
8a
F:= A minus B
11a
F:= A
9a
A:= F
Q$_x$:=Q$_x$·2 (0 nachziehen)
Q$_y$:=Q$_y$·2 (1 nachziehen)
12a
A:= F
Q$_x$:=Q$_x$·2 (0 nachziehen)
Q$_y$:=Q$_y$·2 (0 nachziehen)
10a
A:=A·2 (0 nachziehen)
$\overline{Q_{x_0}}$

Nun liegen die - positiven - Ergebnisse in Q_x und Q_y vor; mit K = 1 müssen sie aber noch vor dem eventuellen Komplementieren vertauscht werden:



b) Beim symmetrischen DDA werden die Register
A und B um A_f

$$A_f: \quad A_{f_{-1}} \; A_{f_{-2}} \; \dots \; A_{f_{-11}}$$

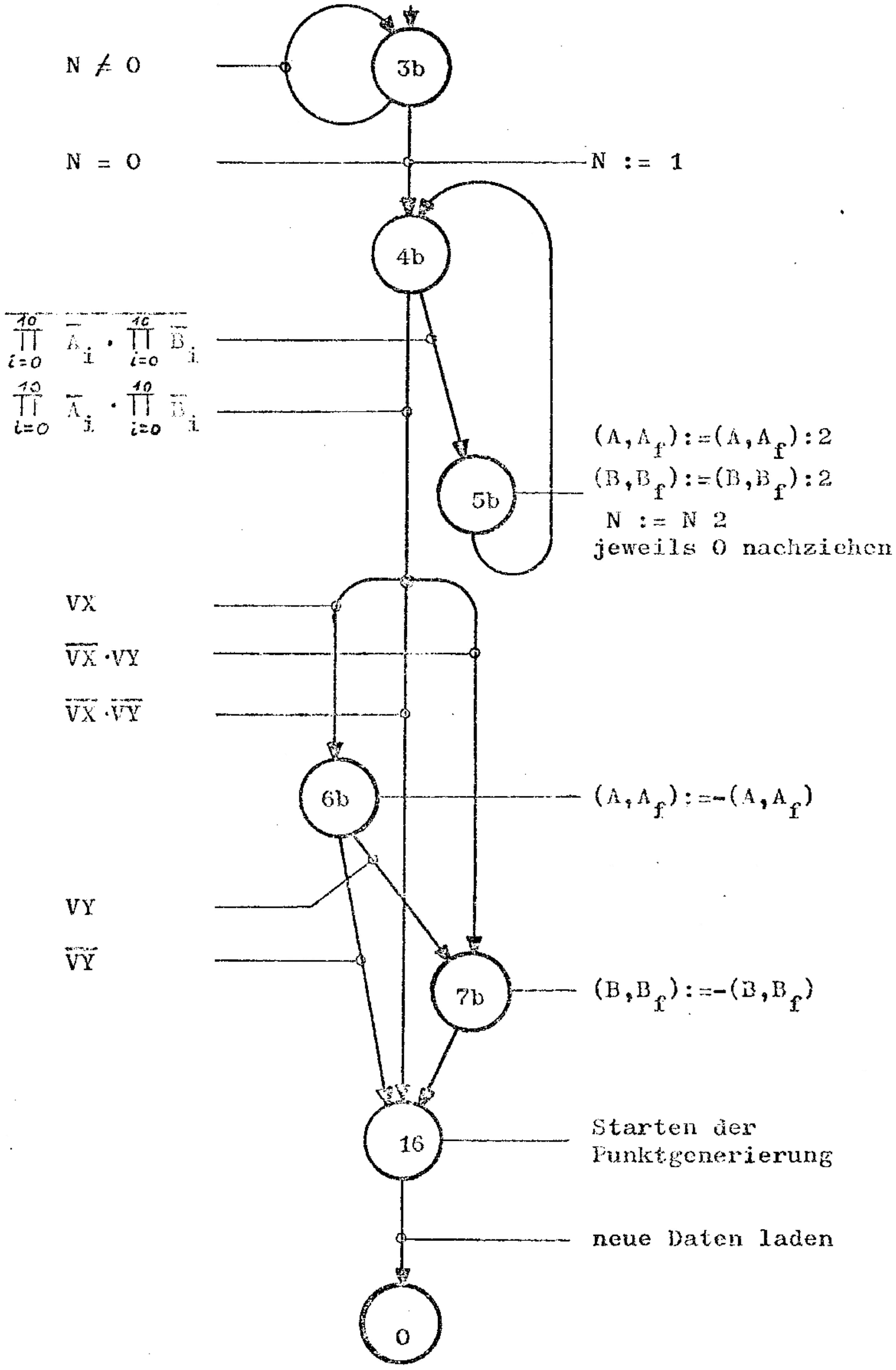
und B_f

$$B_f: \quad B_{f_{-1}} \; B_{f_{-2}} \qquad B_{f_{-11}} \qquad ,$$

die die nicht ganzzahligen Quotienten enthalten werden, verlängert.
Ist hier der letzte Punkt des vorigen Vektors gezeichnet worden, wird in dem Falle, daß in A, A_f oder B, B_f noch eine Zahl steht, die nicht kleiner als 1 ist, durch 2 dividiert, d.h. einmal in Richtung $A_{f_{-11}}$ bzw. $B_{f_{-11}}$ geshiftet.

Entsprechend wird im auf 1 vorgesetzten 12-bit-Rückwärtszahler N mit 2 multipliziert, d.h. in Richtung auf das MSB N_{11} geshiftet.

Das Ergebnis muß nun noch vorzeichenrichtig gebildet werden - wie beim unsymmetrischen DDA.
Dazu wieder ein Diagramm:



N ≠ 0
3b
N = 0
N := 1
4b
$\overline{\prod_{i=0}^{10} \bar{A}_i \cdot \prod_{i=0}^{10} \bar{B}_i}$
$\prod_{i=0}^{10} \bar{A}_i \cdot \prod_{i=0}^{10} \bar{B}_i$
5b
$(A,A_f):=(A,A_f):2$
$(B,B_f):=(B,B_f):2$
N := N 2
jeweils 0 nachziehen
VX
$\overline{VX} \cdot VY$
$\overline{VX} \cdot \overline{VY}$
6b
$(A,A_f):=-(A,A_f)$
VY
$\overline{VY}$
7b
$(B,B_f):=-(B,B_f)$
16
Starten der Punktgenerierung
neue Daten laden
0

Die Zustände

	14a	-	6b
und	15a	-	7b

entsprechen einander, wenn auch die Eingänge der Komplementierer stark unterschiedlich beschaltet sein müssen.

Aus dem genannten kann gefolgert werden, daß mit erheblichem - entscheidendem - Aufwand der Division gleichmäßig geformte Vektoren gezeichnet werden können. Allein das Ergebnis rechtfertigt nicht den Aufwand, die Steuerschaltung sowie die Schaltung der arithmetischen Bauteile - aus Schnelligkeitsgründen Arithmetisch-Logische Einheiten mit den Ausgängen F - sind beim unsymmetrischen DDA unnötig komplex.
Dem Entwurf eines symmetrischen DDA ist deshalb der Vorzug zu geben.

Literaturverzeichnis

/1/ Newman/ Sproull:
Principles of Interactive Computer Graphics
1973

/2/ Das TTL-Kochbuch
Deutschsprachige TTL-Applikationen
Texas Instruments
1973

/3/ Liebig, H.C.:
Digitalrechner-Organisation I
Vorlesungsskript TU Berlin
SS 1971